

对数学高考题中新概念题的分析

519080 北京师范大学(珠海)附中 黄 晓

所谓“新概念题”是从教材中引申一些新的概念、符号,要求学生运用所给的新概念或符号作一步的运算、分析、推理来解决问题,需要学生有较强的阅读理解能力、知识迁移能力及综合应用知识的能力.新概念题既能考查学生的运算能力、逻辑推理能力,也能考查学生分析、解决问题的能力以及独立获取数学知识的能力,符合“能力立意”的命题思想.另外新概念题还能反映学生进一步学习的潜能,体现了高考的选拔功能.因此,新概念题作为一个新题型而得到命题专家的青睐.新概念题将是以后数学高考题的常见题型.对此,应重视对新概念题的命题分析、备考,笔者在分析近年来各省数学高考题的新概念题的基础上,讨论了新概念题“考什么”、“怎么考”及“如何备考”的问题,以图高考复习提供参考.

1 新概念题考什么

1.1 命题背景分析

新概念题有高等数学的背景,而学生认知结构中缺乏认知其高数背景的“先行组织者”,如果遇到某个“新概念题”直接告诉学生该题考查的是高等数学中

的哪个概念,则会让学生产生畏难的心理.实际上,“新概念题”虽有高等数学背景,但分析发现:这类题是在初等数学中集合、向量等概念的基础上加以引申而来,对于这些概念学生认知结构中有相应的“先行组织者”,如果从初等数学概念入手分析题的知识背景,则会让学生产生似曾相识的感觉.因此,笔者重点总结的是“新概念题”的初等数学的知识背景.分析近年来的数学高考题发现:集合、函数、向量及数列是新概念题主要的命题背景,这是因为这些内容是连接初等数学与高等数学的纽带,高考作为选拔性考试,需要考查学生进一步学习的潜力,因此与高等数学有联系的集合、函数、向量及数列等内容成为命题的热点.

分析近年来各省数学高考题发现,以集合、函数、向量及数列作为命题背景的创新题不乏其见.

案例1 以集合为背景的新概念题

(2012上海高考理-23)对于数集 $X = \{-1, x_1, x_2, \dots, x_n\}$, 其中 $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n, n \geq 2$, 定义向量集 $\{\vec{a} | \vec{a} = (s, t), s \in X, t \in X\}$ 若对于任意 \vec{a}_1 , 存在 \vec{a}_2 , 使得 $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = 0$ 则称 X 具有性质 P . 例如 $X = \{-1, 1, 2\}$ 具有性质 P .

③ 每公斤蟹苗的价格为 75 元,其饲养费用为 525 元,当年可获 1400 元收益;

④ 每公斤虾苗的价格为 15 元,其饲养费用为 85 元,当年可获 160 元收益;

(1) 若租用水面 n 亩,则年租金共需 _____ 元;

(2) 水产养殖的成本包括水面年租金、苗种费用和饲养费用,求每亩水面蟹虾混合养殖的净利润(利润:收益-成本);

(3) 李大爷现有资金 25000 元,他准备再向银行贷款不超过 25000 元的款.用于蟹虾混合养殖.已知银行贷款的年利率为 8%,试问李大爷应该租多少亩水面,并向银行贷款多少元.可使年利润超过 35000 元?

本题将苏州的特产与数学相结合,不仅体现独特的苏州气息,还蕴含着数学中的银行贷款利率问题,让学生耳目一新,激发浓厚的解题乐趣.

2.2.4 体现人文精神,形成良好导向

数学试卷命题要体现“依纲用本”,试题尽量源

于课本,有利于使学生摆脱题海,减轻过重的学业负担.试卷体现了以学生为本的人文精神,从而使全体考生能充分发挥自己应有的水平,也使试卷能更好地了解、鉴别考生的不同能力.如个别题目加注提示语,关键字眼加注着重号,以减少考生出现非知识性的错误.为学困生设置附加题等,使更多的学困生通过努力,能达到合格的水平,这更好地体现了“人人学有价值的数学;人人都能获得必需的数学,不同的人数学上得到不同的发展”的理念.

总之,试卷命题要体现数学学科的特点,注重考查基本知识和基本技能,突出数学思想方法的理解与应用,努力创造探索思考的机会与空间.同时注重考查学生提出问题、理解问题,获取数学信息的能力.在命题的创新上要有所作为,既利用各种传统题型,又适当采用新颖的题型,使“知识与技能、过程与方法、情感态度与价值观”的三维目标更多地融入试卷之中,使中学数学命题能充分发挥考试的导向作用,从而促进学生的全面发展.

(1) 若 $x > 2$, 且 $\{-1, 1, 2, x\}$ 具有性质 P , 求 x 的值;

(2) 若 X 具有性质 P , 求证: $1 \in X$, 且当 $x_n > 1$ 时, $x_{n+1} = 1$;

(3) 若 X 具有性质 P , 且 $x_1 = 1, x_2 = q$ (q 为常数), 求有穷数列 x_1, x_2, \dots, x_n 的通项公式.

点评: 本题属于新概念题, 通过定义“集合 X 具有性质 P ”这一概念, 考查学生独立获取数学知识的能力及分析问题、解决问题的能力. 从定义的表达看, 该题有抽象代数的背景, 但是从考查的知识点看, 本题主要考查了集合的基本性质、元素和集合的关系以及集合的综合运算等基础知识. 因此, 与其说其具有高等数学背景, 不如说其是以初等数学中集合作为命题背景. 以集合作为命题引申点的高考题是近年来命题的终点内容, 应引起足够重视.

案例 2 以函数为背景的新概念题

(2013 辽宁理-11) 已知函数 $f(x) = x^2 - 2(a+2)x + a^2, g(x) = -x^2 + 2(a-2)x - a^2 + 8$.

设 $H_1(x) = \max\{f(x), g(x)\}, H_2(x) = \min\{f(x), g(x)\}$, ($\max\{p, q\}$ 表示 p, q 中的较大值, $\min\{p, q\}$ 表示 p, q 的最小值), 记 $H_1(x)$ 的最小值为 A , $H_2(x)$ 的最大值为 B , 则 $A - B =$ ()

- (A) $a^2 - 2a = 16$ (B) $a^2 + 2a - 16$
(C) -16 (D) 16

点评: 本题以二次函数作为命题的出发点, 通过定义两个新的函数 $H_1(x), H_2(x)$, 考查函数最值的知识点; 能力上, 主要考查了学生的阅读能力、分析和解决问题的能力. 该题定义函数的方式在高数中的数学分析中比较常见, 但实际命题时还是紧紧围绕高中函数的相关知识. 对此, 在备考时要注重思考以函数为出发点的新概念题的引申方向.

案例 3 以平面向量为背景的新概念题

(2010 山东理-12) 定义平面向量之间的一种运算“ \odot ”如下, 对任意的 $\vec{a} = (m, n), \vec{b} = (p, q)$, 令 $\vec{a} \odot \vec{b} = mq - np$, 下面说法错误的是 ()

- (A) 若 \vec{a} 与 \vec{b} 共线, 则 $\vec{a} \odot \vec{b} = 0$
(B) $\vec{a} \odot \vec{b} = \vec{b} \odot \vec{a}$
(C) 对任意的 $\lambda \in \mathbf{R}$, 有 $(\lambda \vec{a}) \odot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \odot \vec{b})$
(D) $(\vec{a} \odot \vec{b})^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2$

点评: 本题在平面向量的基础上, 加以创新, 属新概念题, 考查平面向量的基础知识以及分析问题、解决问题的能力.

案例 4 以数列为背景的新概念题

(2010 湖南理-15) 若数列 $\{a_n\}$ 满足: 对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$, 只有有限个正整数 m 使得 $a_m < n$ 成立, 记

这样的 m 的个数为 $(a_n)^*$, 则得到一个新数列 $\{(a_n)^*\}$. 例如, 若数列 $\{a_n\}$ 是 $1, 2, 3, \dots, n, \dots$, 则数列 $\{(a_n)^*\}$ 是 $0, 1, 2, \dots, n-1, \dots$. 已知对任意的 $n \in \mathbf{N}^*, a_n = n^2$, 则 $(a_5)^* =$ _____. $((a_n)^*)^* =$ _____.

点评: 本题以数列为背景, 通过新定义考查学生的阅读能力、分析和解决问题的能力, 属于难题.

1.2 立意分析

高考命题已由“知识立意”变为“能力立意”. 新概念题体现了“能力立意”的思想, 其主要考查学生数学阅读理解能力、面对新情境分析解决问题的能力、独立探究获取数学知识的能力.

新概念题注重考查学生数学阅读理解能力, 主要是语言的转化能力即文字语言和符号语言的转化能力, 既要求学生能把符号语言转化为文字语言(学生用自己通俗的语言理解题意), 也要求学生能把文字语言转化为符号语言(学生用数学符号表达解法). 比如案例 1, 学生要准确把握题意, 首先要把数集 X 的符号描述转化为下面的一些文字描述: 第一、数“ -1 ”一定是数集 X 的元素; 第二、数集 X 至少有三个元素; 第三、数集 X 除了“ -1 ”外其他元素都大于零, 且单调递增. 其次, 要求学生能把向量集 Y 的符号描述转化为文字描述: 从数集 X 中任意选取两个数作为向量的坐标, 然后由这些向量组成集合 Y . 最后, 学生为了更好地理解集合 X 具有性质 P 的意思, 可以用文字语言描述出来, 即集合 X 具有性质 P 是指: 对于集合 Y 中的任意一个向量都能在 Y 中找到一个与之垂直的向量. 学生通过把符号语言转化为通俗的文字语言, 有助于理解题意、找到解法, 而在此基础上学生需用数学符号语言表达自己的解法, 这又要求学生能把文字语言转化为符号语言. 只有在完成这两种转化的基础上, 学生才能较好地解决该题.

新概念题注重考查学生分析和解决问题的能力. 一般的考题, 考查学生是否会用所学知识去解决问题, 而新概念题则要求学生数学式地思考和分析问题. 这类问题考生无法套用现成的题型、解题模式, 可以有效地考查学生学习新知识、解决问题的能力. 比如要解决案例 1 的问题就没有现成的公式定理可用. 问题的关键是学生要深刻理解集合 X 具有性质 P 的含义, 题目给了一个特殊的集合说它具有性质 P , 实际上是提示学生利用特殊例子去理解比较抽象的定义, 考查了特殊化的思想. 又比如学生要解决案例 4 需要尝试算出前面几项, 然后找规律, 考查的是学生归纳抽象能力. 特殊化思想、归纳等都是

数学式地思考和分析问题的思维方式,由此可见,新概念题比较侧重考查学生的数学思维方式,备考的重要任务是教会学生面对该类题时要怎么想。

新概念题注重考查学生独立探究获取数学知识的能力。新概念题没有教师的讲解举例,要求学生自己去仔细揣摩、领会和理解,对学生的独立学习能力和抽象思维能力要求较高。比如案例 4,设定两问,第一问比较简单,而第二问则在第一问的基础上复杂化,需要学生写出前面的一些项然后从中找出规律,学生经历尝试、观察、分析和归纳的探究过程获得对新数列的认识,考查了学生的探究能力。

2 新概念题怎么考

2.1 题型分析

新概念题既以选择题的形式出现,也以填空题和解答题的形式出现。有些省份的新概念题是选择题或填空题,作为中档题;而有些省份却以解答题的形式出现,作为难题。比如上海和北京的高考卷就常以解答题的形式出现,且作为压轴题放最后。从新定义的对象来分,新概念又主要分为四类:定义新性质、定义新概念、定义新运算和定义新法则。比如案例 1 定义了一个性质,案例 2 定义了一个新概念,案例 3 则定义了一个新运算,案例 4 则定义了新数列产生的法则。

2.2 设问分析

新概念题的设问具有分层性和开放性的特点。新概念题一般会设置两到三个问题,问题由易到难,问题间联系也比较密切。一般来说,前面问题的结论或方法可以迁移到后面的问题,比如案例 4 第一问的结论和方法可以迁移到第二问。即使有些不能直接迁移,但是解决前面的问题有利于加深对新概念的理解,从而有利于后面问题的解决,比如案例 1 前面问题的解决有利于学生更深刻地理解集合 X 具有性质 P 的含义,学生通过前两问的解决逐步领会如何利用集合 X 具有性质 P 这一条件,从而有利于第三问的解决。另外,新概念题的问题也比较开放。一般来说,学生不能套用现成的公式定理,也没有现成的套路。学生自己要先学习新给的概念,然后去尝试、观察、发现、归纳和概括抽象,解题的过程是开放的。比如案例 1 和案例 4 的问题就不直接代公式和定理,学生都要经过不断的尝试和归纳才能找到解决的方法,每个学生的解题过程也会有所不同,过程是开放的。

3 新概念题的备考对策

以上分析了新概念题考什么和怎么考的问题。

针对以上两个问题,提出了以下的备考对策。

3.1 重视培养学生数学语言的“语感”,提高学生数学阅读理解能力

由以上分析可知,新概念题在定义新概念、新性质、新运算和新法则的基础上设问,要求学生先读懂所给的概念、性质、运算和法则,要求学生有较强的阅读理解能力。因此,学生的数学阅读能力对完成新概念题尤为重要,而数学语言具有与自然语言不同的简洁性、严谨性和抽象性等特点。数学语言这种特有的特点表明:只依靠语文等其他学科提高学生数学阅读能力具有一定的困难。因此,在平时的数学教学中要重视培养学生数学语言的“语感”,提高数学阅读能力。

首先,要培养学生的“符号感”。心理学研究表明:知识的呈现形式会影响知识的表征方式,而表征方式又会影响人对知识的理解。因此,数学知识的表征方式是特定的,学生能否建立这种特定的表征方式会影响学生对数学知识的理解。这就意味着:要帮助学生理解数学就需要帮助其建立数学式的表征方式,而数学知识的最大特点就是符号化,所以要做到这点,就需要培养学生良好的符号感。新概念题中的表述中含有很多符号,而且还是新符号。因此要理解新概念题的题意,“符号感”很重要。总之,数学语言是符号化的语言,要提高学生的数学阅读理解能力需要培养学生良好的“符号感”。

其次,要重视培养学生语言的转化能力。既然数学语言是符号化的语言,要深刻地理解符号所表达的意思,就需要进行符号语言和自然语言间的转化。从认知心理学观点看,所谓“理解了”,是指能对同一对象的不同表征形式进行转化。因此,要提高学生的阅读理解能力,需要提高学生的语言转化能力。在平时的教学中,对于定义定理要注意引导学生用不同语言进行表达,把语言转化能力的培养寓于平时的教学中。

最后,重视数学语言的句式结构的归纳。数学语言的表达有特定的词和句式结构。比如“或”、“且”、“当且仅当”及“有且仅有”等在数学语言中有特定的含义,教学中要注意帮助学生深刻理解这些特定词语的意思。又比如数学中极限的“ $\epsilon - N$ ”语言: $\forall \epsilon > 0$, 存在正整数 N , 当 $n > N$ 时, 都有 $|a_n - a| < \epsilon$, 则称 a 是数列 $\{a_n\}$ 的极限。把当中的结构抽出来即为“对任意……, 存在……, 当……, 有……”, 很多数学命题都采用这种句式结构, 如案例 4 的句式结构就很类似。当然, 数学语言还有其他句式结构, 在平时的教学中要注意总结归纳, 这样, 学生在阅读

找寻“旋转变换”中“不变性”

226200 江苏省启东市开发区中学 杨雪华

初中数学有平移、翻折、旋转、位似四种图形变换,旋转以其“变化莫测”成为学生学习的较难知识点之一.作为一线的数学教师常常困惑于如何找到探究此类问题的一般解法,进而引导学生从旋转的

“变化”中理出一条“不变”的分析规律,成为学生解题的重要经验.

旋转和相似的结合是初中数学的重点内容之一,纵观历年来全国各地的中考数学卷,多少总能找

新概念题时会觉得似曾相识,有利于理解题意.

3.2 重视与高等数学相关联的知识和复习

新概念多以集合、函数、平面向量和数列为命题背景.其中的原因是:这些知识是联系初高等数学的纽带,而高考作为选拔性考试,有一个重要的目的就是考查学生继续学习的潜力.所以,新概念题喜欢选择那些与高等数学有联系的知识为背景.比如北京2010年高考题第20题和上海2012年高考题第23题都以集合为背景.因此,高三备考要注意上述知识的命题研究.

首先,作为教师要重视分析新概念题中的高等数学背景.数学教师不但要知道新概念题的初等数学背景,而且要知道其高等数学背景,亦即要知道集合函数等这些知识整个纵向的发展脉络.对高等数学背景的把握有助于明确命题方向.其实,新概念不乏高等数学背景.如2010年四川高考理科数学第16题就以高等代数中“数域”为背景,稍微改动,引入封闭集的定义.对此,教师在高考复习备考时要注重思考和总结集合、函数、向量及数列等知识在高等数学中的地位,对知识的发展脉络做到了然在胸.

3.3 展现教师解决数学问题的思维,让学生体验数学式的思考方式

新概念题没有现成公式定理可用,也没有现成的解题套路,解答新概念题时,没有教师的讲解和模仿的例子,完全是学生独立分析完成,对学生分析问题的能力有较高的要求.因此,让学生知道遇到新的数学问题如何去想对解决新概念题尤为重要.要做到这点,教师在平时的教学中,要向学生展现思考问题的过程、介绍教师的数学思维活动经验.比如,教师在解决问题过程中,有怎样的思考过程;在遇到困难时,如何寻找突破难点的方法;怎样开拓思路,打破思维僵局;如何反思、修正、整理思维过程,精确表

达思想、方法、推理等.学生在解决新概念题的过程中要经历多次尝试、调整,这离不开学生对自己思维的反思和调节.“由于数学学习材料的抽象性,导致了数学学习活动的高度抽象性.这种具体性较差、与现实有一定距离的学习活动,更加需要多活动过程的自我意识,这是因为学生的数学学习是螺旋上升的,对新知识的认识是在对已有知识进行反思的基础上实现的,因此,数学学习活动需要学习活动和活动过程自我意识的协调统一.”学生对新概念题的认识理解也是在对所学知识进行反思的基础上实现的,因此,学生要理解新概念题,离不开学生对自己思维的反思和调节.教师向学生展现解决问题的思维过程,有助于提升学生反思和调节的能力,从而有助于新概念题的解决.

4 结语

新概念将是以后高考题的常见题型,考查了学生数学的阅读理解能力、数学式地分析和解决问题的能力.复习备考中要重视培养学生的“符号感”,提升学生阅读理解能力.另外,教师还应展现思考问题的思维过程,让学生体验数学思维活动的经验,提升数学式地分析和解决问题的能力.

参考文献

- [1] 马云鹏,孔凡哲,张春莉主编.数学教育测量与评价[M].北京师范大学出版社,2009.
- [2] 罗强.新的数学能力观下的高考数学试题——2002年高考数学试题解析[J].中学教学研究,2003,1.
- [3] 张少君,昌国良.数学新概念题的突破——从湖南2011年高考新概念题谈起[J].中学数学教学,2012,1.
- [4] 曹才翰,章建跃.数学教育心理学[M].北京师范大学出版社,2006.