

圆锥曲线的一个统一性质

——对2012年福建高考(理数)第19题的推广

◎北京师范大学(珠海)附属高级中学 黄 晓

一、问题背景

本论文所发现的圆锥曲线的统一性质源于福建省2012年高考理科数学第19题,题目如下:

如图1,椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$)的左焦点为 F_1 ,右焦点为 F_2 ,离心率 $e = \frac{1}{2}$.过 F_1 的直线交椭圆于 A, B 两点,且 $\triangle ABF_2$ 的周长为8.

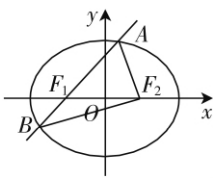


图1

(I) 求椭圆 E 的方程.

(II) 设动直线 $l: y = kx + m$ 与椭圆 E 有且只有一个公共点 P ,且与直线 $x = 4$ 相交于点 Q .试探究:在坐标平面内是否存在定点 M ,使得以 PQ 为直径的圆恒过点 M ? 若存在,求出点 M 的坐标;若不存在,说明理由.

解析:(1) 由题知 $\begin{cases} \frac{c}{a} = \frac{1}{2}, \\ 4a = 8, \end{cases}$ 所以 $a = 2, c = 1$,又 $b^2 = a^2 - c^2$,所以 $b = \sqrt{3}$,所以椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

(2) 由对称性可知设 $P(x_0, y_0)$ ($y_0 > 0$)与 $M(x, 0)$,由 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 得 $y = \sqrt{3 - \frac{3}{4}x^2}$,所以 $y' = -\frac{3x}{4\sqrt{3 - \frac{3}{4}x^2}}$,所以 $k = -\frac{3x_0}{4y_0}$,所以直线 $l: y - y_0 = -\frac{3x_0}{4y_0}(x - x_0)$.令 $x = 4$ 得 $Q(4, \frac{3(1-x_0)}{y_0})$,圆过点

$M(x, 0) \Leftrightarrow \overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MQ} = 0 \Leftrightarrow x_0(x - 1) = (x - 1)(x - 3)$ (*).

又(*)对 $x_0 \in (-2, 2)$ 恒成立,所以 $x = 1$,所以 $M(1, 0)$.

再考虑猜想1的逆命题得猜想2:

猜想2:动直线 l 与椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$)有公共点 $P(x_0, y_0)$ 且与直线 $x = \frac{a^2}{c}$ 交于点 Q ,若以 PQ

二、推广

我们注意到直线 $x = 4$ 恰好是椭圆 E 的右准线,而圆过的定点 $M(1, 0)$ 恰好是椭圆的右焦点,于是把问题(II)所得结论推广为一般的情况可得下面的猜想:

猜想1:动直线 l 与椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$)有公共点 $P(x_0, y_0)$ 且与直线 $x = \frac{a^2}{c}$ 交于点 Q ,若直线 l 与椭圆相切,则以 PQ 为直径的圆过定点 $M(c, 0)$.

证明:设直线 l 的方程为 $\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$.

令 $x = \frac{a^2}{c}$ 得 $y = \frac{b^2(c - x_0)}{y_0 c}$,所以 $Q(\frac{a^2}{c}, \frac{b^2(c - x_0)}{y_0 c})$,故以 PQ 为直径的圆的方程为: $(x - x_0)(x - \frac{a^2}{c}) + (y - y_0)(y - \frac{b^2(c - x_0)}{y_0 c}) = 0$.

由图形对称性知 M 若存在,则在 x 轴上,设 $M(x_1, 0)$,圆 $(x - x_0)(x - \frac{a^2}{c}) + (y - y_0)(y - \frac{b^2(c - x_0)}{y_0 c}) = 0$ 过定点 $M(x_1, 0) \Leftrightarrow (x_1 - x_0)(x_1 - \frac{a^2}{c}) + (0 - y_0)(0 - \frac{b^2(c - x_0)}{y_0 c}) = 0 \Leftrightarrow x_0(x_1 - c) - (x_1 - c)(x_1 - \frac{b^2}{c}) = 0$.

因为 $x_0 \in (-a, a)$,所以 $\begin{cases} x_1 - c = 0, \\ (x_1 - c)(x_1 - \frac{b^2}{c}) = 0, \end{cases}$ 所以 $x_1 = c$,故 $M(c, 0)$.

再考虑猜想1的逆命题得猜想2:

猜想2:动直线 l 与椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$)有公共点 $P(x_0, y_0)$ 且与直线 $x = \frac{a^2}{c}$ 交于点 Q ,若以 PQ



为直径的圆过定点 $M(c, 0)$, 则直线 l 与椭圆相切.

证明: 设 $Q\left(\frac{a^2}{c}, y_1\right)$, 则 $\overrightarrow{PM} = (c - x_0, -y_0)$, $\overrightarrow{QM} = \left(c - \frac{a^2}{c}, -y_1\right)$.

因为 PQ 为直径, 所以 $\overrightarrow{PM} \perp \overrightarrow{QM}$, 所以 $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{QM} = 0$, 所以 $(c - x_0)\left(c - \frac{a^2}{c}\right) + y_0 y_1 = 0$, 所以 $y_1 =$

$$\frac{b^2(c - x_0)}{y_0 c}, \text{ 所以 } k_l = k_{PQ} = \frac{y_0 - \frac{b^2(c - x_0)}{y_0 c}}{x_0 - \frac{a^2}{c}} =$$

$$\frac{cy_0^2 - b^2(c - x_0)}{y_0(c x_0 - a^2)}. \text{ 又设过椭圆上点 } P(x_0, y_0) \text{ 的切线}$$

为 l_1 , 则 l_1 的方程为: $\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$, $k_{l_1} = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}$, 下

证: $k_l = k_{l_1}$.

$$k_l = k_{l_1} \Leftrightarrow -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0} = \frac{cy_0^2 - b^2(c - x_0)}{y_0(c x_0 - a^2)} \Leftrightarrow b^2 x_0^2 + a^2 y_0^2 = a^2 b^2 \Leftrightarrow \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1, \text{ 显然成立.}$$

故 $k_l = k_{l_1}$, 所以直线 l 与椭圆相切.

由猜想 1 和猜想 2 我们得到下面的命题:

命题 1: 动直线 l 与椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 有

公共点 $P(x_0, y_0)$ 且与直线 $x = \frac{a^2}{c}$ 交于点 Q , 则直线 l 与椭圆相切当且仅当以 PQ 为直径的圆过定点 $M(c, 0)$.

把命题 1 推广到双曲线和抛物线上分别得命题 2 和命题 3.

命题 2: 动直线 l 与双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a, b > 0)$

有公共点 $P(x_0, y_0)$ 且与直线 $x = \frac{a^2}{c}$ 交于点 Q , 则直线 l 与双曲线相切当且仅当以 PQ 为直径的圆过定点 $M(c, 0)$.

命题 3: 动直线 l 与抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 有公共点 $P(x_0, y_0)$ 且与直线 $x = -\frac{p}{2}$ 交于点 Q , 则直线 l 与抛物线相切当且仅当以 PQ 为直径的圆过定点 $M\left(\frac{p}{2}, 0\right)$.

命题 2、3 的证明与命题 1 类似, 下面只证明命题 3.

证明: (1)“必要性”. 设直线 l 的方程为: $y_0 y =$

$p(x + x_0)$.

令 $x = -\frac{p}{2}$ 得 $y = \frac{y_0^2 - p^2}{2y_0}$, 所以 $Q\left(-\frac{p}{2}, \frac{y_0^2 - p^2}{2y_0}\right)$, 故以 PQ 为直径的圆的方程为: $(x - x_0)\left(x + \frac{p}{2}\right) + (y - y_0)\left(y - \frac{y_0^2 - p^2}{2y_0}\right) = 0$.

由图形对称性知 M 若存在, 则在 x 轴上, 设 $M(x_1, 0)$, 圆 $(x - x_0)\left(x + \frac{p}{2}\right) + (y - y_0)\left(y - \frac{y_0^2 - p^2}{2y_0}\right) = 0$ 过定点 $M(x_1, 0) \Leftrightarrow (x_1 - x_0) \cdot \left(x_1 + \frac{p}{2}\right) + (0 - y_0)\left(0 - \frac{y_0^2 - p^2}{2y_0}\right) = 0 \Leftrightarrow x_0\left(x_1 - \frac{p}{2}\right) - \left(x_1 - \frac{p}{2}\right)(x_1 + p) = 0$. 因为 $x_0 \in (0, +\infty)$, 所以

$$\begin{cases} x_1 - \frac{p}{2} = 0, \\ \left(x_1 - \frac{p}{2}\right)(x_1 + p) = 0, \end{cases} \text{ 所以 } x_1 = \frac{p}{2}, \text{ 故 } M\left(\frac{p}{2}, 0\right).$$

(2)“充分性”. 设 $Q\left(-\frac{p}{2}, y_1\right)$, 则 $\overrightarrow{PM} = \left(\frac{p}{2} - x_0, -y_0\right)$, $\overrightarrow{QM} = (p, -y_1)$.

因为 PQ 为直径, 所以 $\overrightarrow{PM} \perp \overrightarrow{QM}$, 所以 $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{QM} = 0$, 所以 $\left(\frac{p}{2} - x_0\right)p + y_0 y_1 = 0$, 所以 $y_1 = \frac{y_0^2 - p^2}{2y_0}$,

$$\text{所以 } k_l = k_{PQ} = \frac{y_0 - \frac{y_0^2 - p^2}{2y_0}}{x_0 + \frac{p}{2}} = \frac{y_0^2 + p^2}{y_0(2x_0 + p)} = \frac{p}{y_0}. \text{ 又}$$

设过抛物线上点 $P(x_0, y_0)$ 的切线为 l_1 , 则 l_1 的方程为: $y_0 y = p(x + x_0)$, 所以 $k_{l_1} = \frac{p}{y_0}$, 故 $k_l = k_{l_1}$, 所以直线 l 与抛物线相切.

三、结语

命题 1、命题 2 和命题 3 反映了圆锥曲线的一个新的统一性质: 动直线 l 与圆锥曲线 E 有公共点 $P(x_0, y_0)$ 且与曲线右准线交于点 Q , 则直线 l 与曲线相切当且仅当以 PQ 为直径的圆过曲线的右焦点. 我们在 2012 年安徽高考理科数学中的第 20 题看到了该性质的身影, 说明该性质具有一定重要性. 另外, 我们在文章里只讨论了右准线与右焦点的情况, 读者可以类比讨论左准线与左焦点的情况. **W**