# 从几何变换视角理解函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的性质

◇ 广东 黄 晓

面对 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图象变换问题,学生存在"机械套公式而不理解算理"的问题,而面对 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的性质问题时,学生存在同样的问题,即会套用"整体换元法"的步骤但不理解其原理.对于 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图象变换问题,教师通常通过引入平移公式$\begin{cases}x'=x+h,\\ y'=y+k\end{cases}$和伸缩公式$\begin{cases}x'=\lambda x,\\ y'=\mu y\end{cases}$来帮助学生理解图象变换法则的原理,而本文将在此基础上从几何变换的角度解释"整体换元法"的原理.

## 1 平移与伸缩变换的性质

本文所涉及的几何变换为平移和伸缩两种变换.为了更好地从变换的角度去解释"整体换元法"的原理,下面先直观介绍两种变换的主要性质.

**性质1** 平移变换和伸缩变换都是一一变换.

**性质2** 保持同素性:两种变换下,点、线段、射线、直线的像分别是点、线段、射线和直线.

**性质3** 保持元素结合性:两种变换都能保持点和直线的结合关系、直线上点顺序以及直线和曲线的结合关系(相切、相交).

**性质4** 保持共线线段长度比的不变性:$AB$,$CD$为平行(共线)的两条线段,它们在平移和伸缩变换下的像分别为线段 $A'B'$,$C'D'$,则$\frac{AB}{CD}=\frac{A'B'}{C'D'}$.

**性质5** 保持平行性:平移和伸缩变换都能保持两直线的平行性.

## 2 平移和伸缩变换对 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$性质的影响

根据上面平移和伸缩变换的性质,可以直观地得出两种变换对 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$性质的影响的相关结论.

**结论1** 保持单调区间的同素性:平移和伸缩变换下,$y=\sin x$ 的增(减)区间变成$y=A\sin(\omega x+\varphi)$的增(减)区间且一一对应,平移变换还保持区间长度不变.

**结论2** 保持对称轴(对称中心)的同素性:平移和伸缩变换下,$y=\sin x$ 的对称轴(对称中心)变成$y=A\sin(\omega x+\varphi)$的对称轴(对称中心)且一一对应.

**结论3** 保持极值点的同素性:平移和伸缩变换下,$y=\sin x$ 的极大(极小)值点变成$y=A\sin(\omega x+\varphi)$的极大(极小)值点.

## 3 用几何变换解 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的性质问题举例

如何从几何变换角度解释"整体换元法"的原理呢?下面举例说明.

**例1** 求函数 $y=\sin(x+\frac{\pi}{3})$的增区间.

**解** 令$-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant x+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi$,得$-\frac{5\pi}{6}+2k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{6}+2k\pi$,所以 $y=\sin(x+\frac{\pi}{3})$的单调递增区间为$[-\frac{5\pi}{6}+2k\pi,\frac{\pi}{6}+2k\pi]$,$k\in\mathbf{Z}$.

这里采用的是"整体换元法",正如前面指出的那样:学生会机械地套用公式,但是存在疑惑,即"为什么这样求出的区间就是 $y=\sin(x+\frac{\pi}{3})$的增区间".对此可以进行如下分析.

**分析** 由平移变换的同素性知 $y=\sin x$ 与 $y=\sin(x+\frac{\pi}{3})$增区间在平移前后具有一一对应的关系.如图1所示,$y=\sin x$ 的一个增区间 $M$:$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$经过平移与 $y=\sin(x+\frac{\pi}{3})$的增区间 $M'$:$[-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}]$,即$[-\frac{5\pi}{6},\frac{\pi}{6}]$对应.若令 $x\in M$,$x'\in M'$,上述所求范围相当于$-\frac{\pi}{2}\leqslant x'+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{2}$,即$-\frac{5\pi}{6}\leqslant x'\leqslant\frac{\pi}{6}$,其实我们所求得的 $M'$是 $x'$的范围,应用时我们可以把 $x$ 想象成 $x'$.

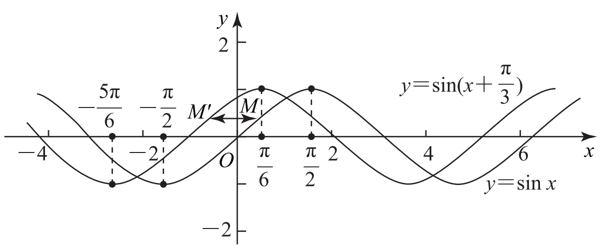


图1

一般地,如果要求 $y=\sin(x+\frac{\pi}{3})$ 的所有单调区间,只需要 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant x+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi\ (k\in\mathbf{Z})$,注意把 $x$ 想象成 $x'$.

**例 2** 如果函数 $y=3\cos(2x+\varphi)$ 的图象关于点 $(\frac{4\pi}{3},0)$ 中心对称,那么 $|\varphi|$ 的最小值为(  ).

A. $\frac{\pi}{6}$  B. $\frac{\pi}{4}$

C. $\frac{\pi}{3}$  D. $\frac{\pi}{2}$

**解** 令 $2\times\frac{4\pi}{3}+\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi$,得 $\varphi=-\frac{5\pi}{6}+k\pi$,当 $k=1$ 时,得 $|\varphi|_{\min}=\frac{\pi}{6}$.此时学生困惑的地方在于"为什么用 $\frac{4\pi}{3}$ 换掉 $x$ 后会等于右边的 $\frac{\pi}{2}+k\pi$",对此可进行如下分析.

**分析** 由平移和伸缩变换的同素性 $y=3\cos(2x+\varphi)$ 与 $y=\cos x$ 的对称中心具有一一对应的关系(如图 2 所示),比如 $y=\cos x$ 的一个对称中心 $M$ 与 $y=3\cos(2x+\varphi)$ 的一个对称中心 $G$ 对应.因此,$y=3\cos(2x+\varphi)$ 的对称中心 $A'(\frac{4\pi}{3},0)$ 与 $y=\cos x$ 的一个对称中心 $A(\frac{\pi}{2}+k\pi,0)$ 对应.若令 $A$ 的横坐标为 $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$,$A'$ 的横坐标为 $x'=\frac{4\pi}{3}$,则 $2\times\frac{4\pi}{3}+\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi$,其实 $\frac{4\pi}{3}$ 所换掉的 $x$ 为 $x'$,应用时注意把 $x$ 想象成 $x'$.

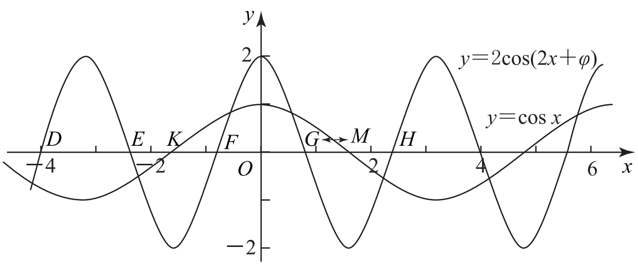


图 2

**例 3** 已知 $\omega>0$,函数 $f(x)=\sin(\omega x+\frac{\pi}{4})$ 在 $(\frac{\pi}{2},\pi)$ 上单调递减,则 $\omega$ 的取值范围是(  ).

A. $[\frac{1}{2},\frac{5}{4}]$  B. $[\frac{1}{2},\frac{3}{4}]$

C. $(0,\frac{1}{2}]$  D. $(0,2]$

**解** 由 $f(x)=\sin(\omega x+\frac{\pi}{4})$ 在 $(\frac{\pi}{2},\pi)$ 上单调递减得 $\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{T}{2}=\frac{\pi}{\omega}$,所以 $0<\omega\leqslant 2$.令

$$\begin{cases}\frac{\pi}{2}\omega+\frac{\pi}{4}\geqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi,\\ \pi\omega+\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}.\end{cases}\qquad ①$$

得 $\frac{1}{2}+4k\leqslant\omega\leqslant\frac{5}{4}+2k$,又 $0<\omega\leqslant 2$,所以 $k=0$,则 $\frac{1}{2}\leqslant\omega\leqslant\frac{5}{4}$.

学生存在的困惑是"为什么单调区间长度要小于半个周期,为什么可以直接用 $\frac{\pi}{2}$ 和 $\pi$ 换掉 $x$ 得出相应的不等式组①".对学生的上述疑惑,可进行如下分析.

**分析** 由 $y=\sin x$ 的图象知,$y=\sin x$ 任意单调区间的长度都不能超过半个周期,由变换前后的对应关系可知 $\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{T}{2}=\frac{\pi}{\omega}$.另外,由平移和伸缩变换的同素性知 $y=\sin(\omega x+\frac{\pi}{4})$ 的减区间 $M'(\frac{\pi}{2},\pi)$ 和 $y=\sin x$ 的某个减区间 $M$ 对应,且 $M$ 为区间 $[\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi]$ 的子集.若令 $x'\in M'=(\frac{\pi}{2},\pi)$,则 $\omega x'+\frac{\pi}{4}\in(\frac{\pi}{2}\omega+\frac{\pi}{4},\pi\omega+\frac{\pi}{4})=M$,而 $M$ 为区间 $[\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{3\pi}{2}+2k\pi]$ 的子集,所以

$$\begin{cases}\frac{\pi}{2}\omega+\frac{\pi}{4}\geqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi,\\ \pi\omega+\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}.\end{cases}$$

其实我们所代的 $\frac{\pi}{2}$ 和 $\pi$ 是 $x'$ 的值.

抽象的原理遇到直观的图形将变得具体易懂.本文从几何变换角度,利用平移和伸缩变换的同素性、元素的结合性等性质得到 $y=A\sin(\omega x+\varphi)\ (A>0,\omega>0)$ 的性质与 $y=\sin x$ 性质的一一对应关系,给出"整体换元法"的直观理解,以期为读者处理函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0)$ 的性质的教学问题提供一定的参考.

(作者单位:北京师范大学(珠海)附属高级中学)