对数学解题教学的新思考
——元认知理论视角下

◉北京师范大学（珠海）附中　黄晓
◉北京师范大学研究生院珠海分院　高文华

一、现实解题教学中的误区

在现实教学中，有些学生听懂了老师的讲解但是不会做题，更确切地说在我们的教学过程中常见这样的一些学生，他们能听懂老师上课所讲的内容，能看懂课本上的例题，可是自己独立解题时常感不知从何下手；另外，我们也会遇到这样一部分学生，只要老师稍作提示，他们能很快找到解题思路，但离开老师的指导就不懂如何思考．我们不得不去思考这样的一个问题，那就是出现这样的情况是学生的问题还是我们老师自身的解题教学缺少一些环节？当前，我们的解题教学比较注重“怎么解”而对“为什么这样解”重视不够．具体来说，就是我们的解题教学比较注重向学生展现最后的解答，而对于“解答是怎么想出来的，中间会遇到哪些挫折又是如何克服的”重视不够．正如沈文选先生说：我们现实的解题教学片面追求解题技巧和个别知识点在解题上的应用，这种教学模式可以培养学生形式运算能力，但是不利于培养学生独立思考的能力．[1]实际上，我们当前的解题教学大都是这样一种模式：复习知识—典型例题讲解—总结方法—变式练习．在这种模式下，不少老师在备课时花大量时间找资料、选习题、归类，然后把每类题对应的方法详细讲给学生听并要求学生“对号入座”地解题；另外就是，教师为引导而引导，有的老师精心设计了很多问题，层层深入地引导学生一步一步地按照老师设计好的思路来解题．这些做法有利于增加学生的知识储备但不利于学生独立思考能力的形成，所以会有部分学生能听懂但不能独立解题．从元认知的角度看，这种解题模式不能帮助学生认清自身认知结构的优点和缺点，学生不清楚自己具备哪些知识还缺哪些知识；另外，也不能帮助学生认识解题的监控过程，不利于学生解题监控能力的培养．笔者在平时的解题教学中也存在这样的缺陷．下面，举一个实际中碰到的例子．在一份周末练习题中有这样一道题：已知S_n是等比数列$\{a_n\}$的前n和，S_3，S_9，S_6成等差数列，求证：a_2，a_8，a_5成等差数列．

这道题的解答过程为：

证明：因为S_3，S_9，S_6成等差数列，所以$S_3+S_6=2S_9$．(1)

若$q=1$，则$S_3=3a_1$，$S_6=6a_1$，$S_9=9a_1$代入(1)式得：$9a_1=18a_1$，所以$a_1=0$．这与$a_1\neq 0$矛盾，所以$q\neq 1$，(1)式可以变形为：

$$\frac{a_1(1-q^3)}{1-q}+\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}=\frac{2a_1(1-q^9)}{1-q}.$$

---

b、u，在原解法中突出了u的地位，强调了u的优先使用权，a、b退居二线，所以我就他们的地位不同得到下面的结构特征．

第一问的情况较简单，我们分析的重点放在第二问和第三问，在第二问的解决中始终围绕$f(u)=u^2+au+(b-2)=0$至少有一实根，它的结构特征的探讨如下：

特征1：$u^2+au+(b-2)=0$看成关于u的一元二次方程，在这里突出u的地位．

特征2：$f(u)=u^2+au+(b-2)$看成二次函数$y=f(u)$与u轴的交点的个数至少有一个，这里还是突出u的地位．

特征3：$u^2+au+(b-2)=0$看成一个恒等式问题，a、b、u，地位是相同的．

特征4：$u^2+au+(b-2)=0$看成关于a、b的直线方程，把u看成常数，a、b地位突出．

与此同时，第三问a^2+b^2的最小值的解决办法将决定整个解题的方向，下面a^2+b^2的最小值就本题而言选取的策略如下：

a^2+b^2的最小值转化为二次函数问题来解决；

利用基本不等式来求解a^2+b^2的最小值；

利用a^2+b^2的几何意义来解决a^2+b^2的最小值．

在这里多种特征方式的出现，体现了知识间结构的清晰度和连通性，同时也开辟了解题途径的多样性，为我们下面的新解法做好基础性的铺垫．

2.反思资源利用

资源的利用是涉及到解题过程中的全过程和每一步，我们重点分析一下比较实质性的第二问的解决．

在第二问的解答的主要是找出根与系数的关系，这使得我们思考，除了这个关系外，还有其他的关系么，(特征2、3、4)其中哪一个关系对我们处理更加容易入手，我们有哪些资源可用，应该做怎样的安排？■

整理得：$a_1q^3+a_1q^6=2a_1q^9$.

又因为$q\neq 0$，所以$a_1q^2+a_1q^5=2a_1q^8$.

所以$a_2+a_5=2a_8$，a_2，a_8，a_5成等差数列.

当时我是这么讲这道题的：

师：S_3，S_9，S_6成等差数列能得到什么式子？

生：$S_3+S_6=2S_9$.

师：对上式用前n项和公式变形，而公式有两个，用哪个呢？

生：两个都可能，要对q分类讨论.

师：先看$q=1$的情况，同学们验证一下q能否为1呢？

生：不可能，$q=1$会得到$a_1=0$.

师：若$q\neq 1$，我们可得……（学生说，教师板书）

师：对于$\frac{a_1(1-q^3)}{1-q}+\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}=\frac{2a_1(1-q^9)}{1-q}$约掉$1-q$化简得$a_1q^3+a_1q^6=2a_1q^9$.

生：可以两边同时除以q得$a_1q^2+a_1q^5=2a_1q^8$，也就是$a_2+a_5=a_8$.

这样的讲解，过程很顺利，学生也觉得自己听懂了.但是，一个星期后再做这道题时只有少数人全对.有部分学生忘了分类，有部分学生在得到$a_1q^3+a_1q^6=2a_1q^9$后继续约简为$1+q^3=2q^6$，试图求出q.出现这种情况，说明学生忘了.那学生为什么会遗忘这么快呢？我的教学是否缺了什么？实际上，我讲这题的时候有些“隐语”没告诉学生.比如为什么要对q分类？为什么没把a_1约掉？为什么不求出q？当求q有困难怎么办？像这些问题都没交代清楚.用元认知的理论来说，就是没把隐藏的对解题思路的监控过程告诉学生.

这个例子说明“师引”和“自引”（学生对解题过程的自我监控）是有区别的.我们的教学的目标不仅是学生在教师指引下做对一个题目，而且要教会学生如何对自己的解题过程进行引导监控，而我们现实的解题教学恰恰忽略了这一点.

二、数学元认知对解题的影响分析

汤服成等研究者通过研究表明：元认知是影响数学问题解决的重要因素，具有修正数学解题目标、激活和重组数学解题策略、强化解题者在数学解题中的主体地位等作用.[2] 波利亚指出：“货源充足和组织良好的知识仓库是一个解题者的重要资本，良好的组织使得所提供的知识易于用上，这可能比知识广泛更为重要.”[3] 波利亚强调了解题认知结构对解题的重要性.而“数学的解题认知结构由解题知识结构、思维结构和解题元认知结构组成.”[4] 也就是说，数学元认知对解题起到重要的作用.郑雅允指出：元认知在数学解题过程中就像一双无形的手指点着学生每一步应该如何进行，是正确解决问题的向导，在整个解题过程中起着潜移默化的引导作用，影响着思维，元认知的监控决定着解题的过程，而解题中的每一步都提醒和反映着元认知监控.[5] 笔者认为，解题者要顺利解决一个数学问题，必须在解题过程中随时对自己的思维过程加以监控、评价和调整，数学的解题过程始终有数学元认知的参与，因此数学元认知，对解题的顺利进行具有重要的影响.

既然这样，那么数学元认知是怎样影响解题的过程呢？学者涂荣豹把数学元认知分为数学元认知知识、数学元认知体验和数学元认知监控三大部分，[6] 下面我们从这三方面分析数学元认知对解题的影响.

从系统的观点，我门可以把解题过程看成是一个封闭的动态系统，在这系统中包括三大要素：主体的内部环境，处于系统外层；数学问题，处于系统内层；解题策略，处于中间层.解题过程的顺利进行，有赖于这三大要素的相互作用，而相互作用的发生，需要解题者对这三大要素有一个认识和评价.数学元认知知识就是通过认清这三大要素对解题产生影响.具体来说，主体通过认清自身数学认知结构的优点和不足影响解题者的解题决策；其次解题者通过认清问题的特征（问题的类型是什么、问题的组织性如何、自己对问题的表征方式是什么）影响解题者对问题本质把握、相关知识的提取、策略的选择和运算操作等；最后解题者通过认清自身具备的策略、策略适用的问题情境来影响解题者对策略的正确选择和有效利用，从而减少尝试和错误的任意性.可见，数学元认知知识起到认识解题系统的作用.

数学元认知体验对解题的影响主要表现在三方面：对解题目标的修正，对数学认知结构的改组，对解题策略的激活.首先，解题者在解题过程中，如果发现原来所定的目标无法达到或是不容易达到时，就会通过元认知体验调整、修正原来的目标，使之容易达成.其次，解题者在解题中遇到困难时会根据元认知体验反思自己数学认知结构的不足，进而补充相应的知识，改组自己的数学认知结构，这样有利于解题的继续进行.最后，在解题过程中，解题者对当前使用的解题策略的有效性会有所怀疑，从而促使解题者不断思考新的解题策略，于是新的策略就被激活.

数学元认知监控相对其他二者，其对解题的影响力更大，是三者的核心.数学元认知监控对解题的影响主要体现：对解题方向的监控，对解题过程的监控，对认知策略的调节.首先，解题过程中，解题者通过数学元认知监控保证思维方向尽可能的向着解题目标，不发生偏离.其次，解题者通过元认知监控及时纠正解题中的错误、审视当前状态与解题目标的差距保证解题的顺利进行.最后，解题者通过数学元认知监控，不断修正思维方法和认知策略，以保证解题的方向性.

三、解题教学中培养数学元认知的策略

既然数学元认知对学生解题能力的提高有重要的影响，那么我们的解题教学理应关注学生数学元认知的培养，具体如何落实呢？

（一）引导学生建构目标体系

在平时的解题教学中应强化学生的目标意识，通过老师平时解题教学的潜移默化的示范作用，帮助学生学会自主确定解题目标，提高解题的主动性.在平时的教学中主要注意以下几点.第一、教师应注意引导学生如何确定问题总目标，在总目标指导下如何建构“小步距”、“层次性”的目标体系.比如面对一个数学问题时，教师以第一人称的方式介绍自己是如何确定该问题的目标的，然后又是如何把目标分成不同阶段的，不同阶段的目标又如何确定等等. 通过教师自我的表露让学生体验确定目标的

过程，从而使学生在离开老师的引导时，自己能独立的根据问题的特征，确定解题的目标体系.第二、教师在解题教学中要有意识的表露自己如何根据不同的目标选择不同的策略. 比如可以向学生表露，这一步我的目标是什么，我为什么选择种方法.通过这种方式帮助学生领会对于不同的目标要选择不同的策略.第三、教师应展示解题工程中自己是如何评价不同阶段的目标体系的.比如教师可以向学生提问：我的目标是什么？该目标完成了吗？完成这目标问题解决有帮助吗？通过这些引导性的提问让学生主动监控自己的目标体系，通过平时教学的渗透，帮助学生慢慢建立起主动监控解题目标的能力.

（二）暴露解题的思维过程

在解题教学的备课中，我们经常关注的是如何选择典型例题、归纳方法，而对于如何向学生暴露老师思考这道题的思维过程缺少考虑和设计. 而解题教学的重要内容和意义就是揭示解题过程中的数学思维.[6]因此笔者认为，教师在进行解题教学备课时应考虑如何向学生暴露自己解题的思考过程或者解题中经历的挫折失误. 在教学实践中笔者建议利用波利亚式的“提示语”揭示思考过程.

人教版高中数学必修2习题3.3B组题中有这么一题目：

已知：$0<x<1$，$0<y<1$.求证：

$$\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2+(1-y)^2}+\sqrt{(1-x)^2+y^2}+\sqrt{(1-x)^2+(1-y)^2}\geqslant$$

$2\sqrt{2}$，并指出等式成立的条件.

笔者在备课时设计了如下的“提示语”：条件能化简吗？结论含有根号，能否两边平方呢？（学生回答后，道出教师的想法：其实老师做这道题的时候也有考虑过平方，但是马上又想到这么做很麻烦）式子右边各项形式上有什么特点？见过类似的式子吗？这题究竟想考查什么？（学生思考后，向学生说明我自己想这题的时候心理就反复问这题究竟想考查什么）能画图把点描上去吗？能换种方式表述这个问题吗？（学生思考后，告诉学生：老师在想到考查两点间的距离公式后，就动手画出直角坐标系并把点描上，最后把问题转化为用几何方式表达）通过以上的“提示语”和说明把教师本人的思考过程以及在遇到困难时如何调整方向，不单展示了思考过程而且展示对思考的监控过程.因此，这种思维的暴露能在不觉中培养学生数学元认知能力.

（三）解题教学要关注题后反思

罗增儒先生在他的《数学解题学引论》中断言：分析典型例题的解题过程是学会解题的有效途径，至少没找到更好的途径之前，这是一个无以替代的好主意.一些专家也指出，一些学习用功的同学总是停留在知识型的水平上，不能形成较强的解题能力，其根本原因就在于他们没有分析典型的例题，有分析自己的解题.相反，善于作解题过程分析的的学生，很快就形成一般解题能力，并且受益终生.[8]笔者认为罗先生这里强调的对解题过程的分析就是对解题的一种反思. 反思的对象是解题认知过程，因此这种反思实际上就是一种元认知.经常进行题后反思有利于数学元认知能力提高，从而有利于学生解题能力的提高.

注重引导学生进行题后反思，是提高学生解题能力的重要途径.那么，在实际教学中又如何引导学生进行反思呢？罗增儒先生提出了解题分析分为两个步骤[9]并从四个方面分析解题过程.[10]笔者根据罗先生的思想，在平时的解题教学中注重在三个层次上引导学生进行题后反思.第一层次：反思解题过程本身；第二层次：反思新解法；第三层次：反思题目的变式推广.对于每个层次，提炼一些反思“提示语”，通过平时潜移默化的过程，提高学生反思的自觉性.

数学元认知影响数学问题解决的重要因素，在平时的教学中通过引导学生建立目标体系、暴露思维过程及引导学生进行题后反思，能有效提高学生的数学元认知水平，从而提高学生解题能力.

参考文献：

1.沈文选.数学解题和解题研究的重新认识.数学教育学报，2005，14(1)：59.

2.汤服成，郭海燕，唐剑岚.初一学生数学问题解决中动静元认知研究.数学教育学报，2002，11(4)：6.

3.波利亚.数学的发现.数学教育学报，2002，11(4)：6.

4.涂荣豹.数学解题学习中的元认知.中学数学教学参考，1998(1-2)：40.

5.郑雅允，刘红，宋玲花，巍朝琦.高中生数学解题中元认知与思维定式的关系研究.北京师范大学学报，1989(1)：68-74.

6.董奇.论元认知.中学数学教学参考，1998(1-2)：40.

7.陈荣华，姜庆彦.高中数学解题教学的一些体会.中学数学教学参考，1998(1-2)：40.

8.罗增儒.解题分析——解题教学还缺少什么环节[J].中学数学教学参考，1998(1-2)：40.

9.罗增儒.解题分析——分析解题过程的两个步骤.中学数学教学参考，1998(1-2)：18.

10.罗增儒.解题分析——分析解题过程的四个方面[J].中学数学教学参考，1998(1-2)：18. ■